

# Bygge tenkende klasserom i matematikk

Grenlandkonferansen 2023

Aud Helene Kjæret [Aud.Kjaret@usn.no](mailto:Aud.Kjaret@usn.no)



Totalt 30 sek/min lystid: 1 sek/min, 3 sek/min, 6 sek/min, 8 sek/min og 12 sek/min

# Bakgrunn

Møte med Jane i 2003:

*«Hi. I'm interested in implementing problem solving in my Grade 7/8 mathematics classroom. Can I get some help from you?»*

*“Look: Before we start talking about problem solving, I want to get a few things straight. First, I don't want any of your glee and enthusiasm in here. I don't want to coteach with you. I don't even want to coplan with you. All I really wanted were some good problems that I could use in my Grade 7/8 math classroom.”*

*“First, you have to stay in that desk (pointing at a desk in the back corner of the room). You are not allowed to talk to the students. And you are definitely not allowed to talk to me.”*

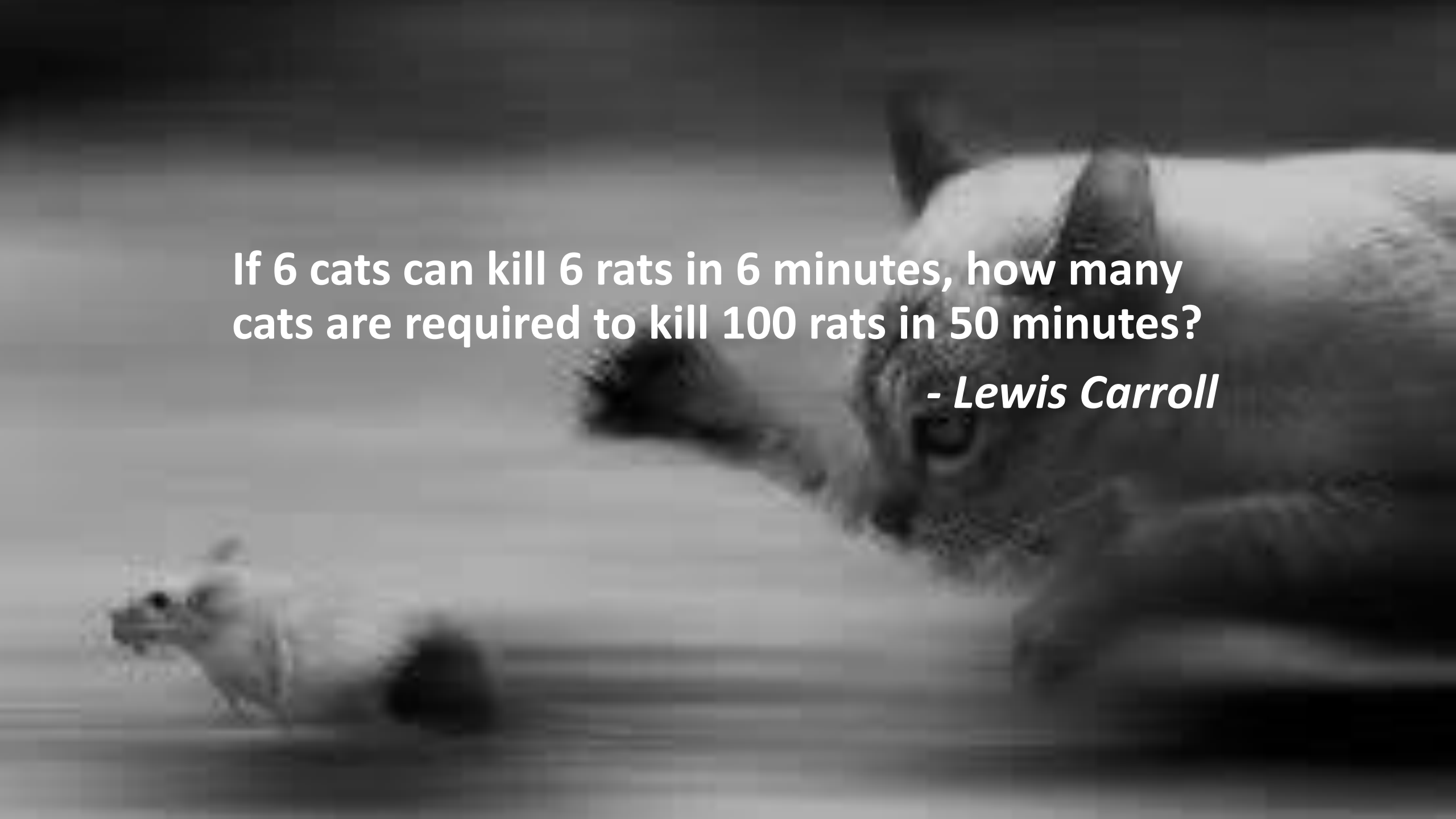


SIMON FRASER UNIVERSITY  
ENGAGING THE WORLD

FACULTY OF EDUCATION

Dr. Peter Liljedahl

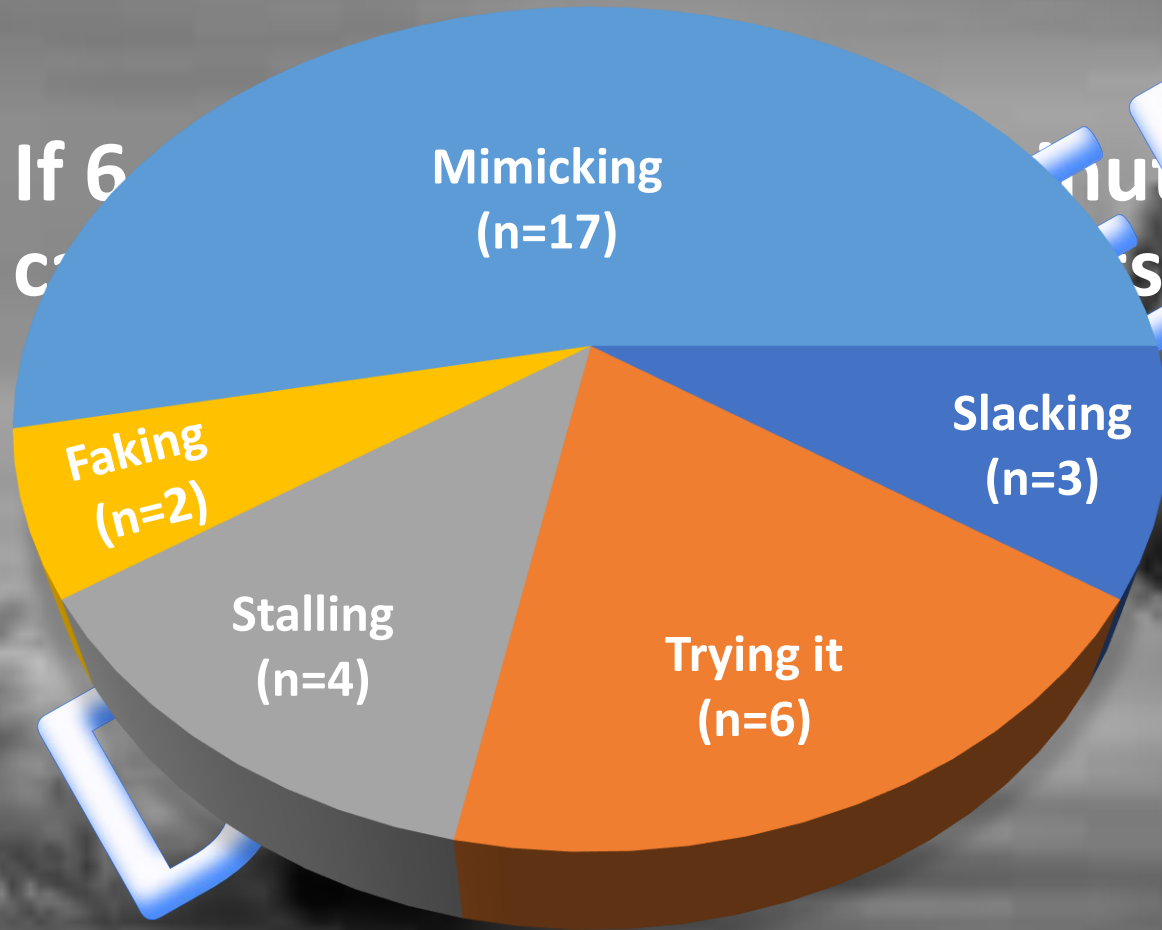


A black and white photograph showing a large, fluffy cat in the foreground, pouncing on a small white rat. The cat's face is close to the rat, and its mouth is open as if it is about to catch it. The background is a plain, light-colored surface.

If 6 cats can kill 6 rats in 6 minutes, how many cats are required to kill 100 rats in 50 minutes?

*- Lewis Carroll*

If 6  
c



Mimicking  
(n=17)

Slacking  
(n=3)

Trying it  
(n=6)

Stalling  
(n=4)

Faking  
(n=2)

...R!  
... minutes, how many  
... in 50 minutes?

- Lewis Carroll



**INSTITUSJONELLE NORMER**





**SOM IKKE ER MULIG Å FORHANDLE?**



**INSTITUSJONELL  
NORM**

**ELEVER  
TENKER IKKE**





400+ LÆRERE | 13 ÅR | 2 UKERS SYKLUS



400+ LÆRERE | 13 ÅR | 2 UKERS SYKLUS

## Praksiser i klasserommet

## *OPTIMALE praksiser for tekning*

|    |                                       |   |
|----|---------------------------------------|---|
| 1  | Hvilke oppgaver bruker vi?            | Bruk oppgaver som krever tenking                                      |
| 2  | Hvordan danner vi samarbeidsgrupper?  | Lag grupper ofte og tilfeldig – synlig for elevene                    |
| 3  | Hvor jobber elevene?                  | Bruk vertikale tavler   |
| 4  | Hvordan organiserer vi klasserommet?  | <i>Flytt fokus fra lærerens tavle til elevenes tavler</i>             |
| 5  | Hvordan svarer vi på spørsmål?        | Svar kun på “fortsett å tenk spørsmål”                                |
| 6  | Når, hvor og hvordan gir vi oppgaver? | Gi oppgaver tidlig, stående og verbalt                                |
| 7  | Hvordan ser lekser ut?                | Gi lekser der elevene sjekker om de har forstått                      |
| 8  | Hvordan fostrer vi elevautonomi?      | Vær med vilje litt mindre hjelpsom                                    |
| 9  | Hvordan bruker vi hint og utvidelser? | Skap og administrer flyt  |
| 10 | Hvordan forankrer vi læring?          | Samle timen fra bunnen  |
| 11 | Hvordan tar elevene notater?          | Bruke meningsfulle notater – skriv til ditt fremtidige glemsomme selv |
| 12 | Hva velger vi å vurdere?              | Vurder det du verdsetter!   |
| 13 | Hvordan vi gir underveisvurdering?    | Kommuniser til elevene hvor de er og hvor de er på vei                |
| 14 | Hvordan vi gir karakterer?            | Rapporter basert på data (ikke poeng)                                 |

# BUILDING THINKING CLASSROOMS

RESEARCH: @pglijedahl  
 SKETCHNOTE: @wheeler\_laura

### 1 Begin w/ a Problem

Give a problem-solving task

To start:

- Problems should be
  - engaging
  - non-curricular
  - collaborative
  - promote talking

Later:

- Problems can be curricular eg textbook problems

### 2 Visibly Random Groups

- Randomly assigned eg playing cards
- Daily & in front of students
- 2 or 3 students / group
- Sit & stand together

### 3 Vertical NonPermanent Surfaces

- Vertical
- Erasable

WHITEBOARD CHALKBOARD WINDOW

- 1 marker or chalk per group
- promotes discussion

### 4 Oral Instructions

give instructions orally

Project

- data
- long expressions
- diagrams

groups will discuss (instead of decoding text)

### 5 Defront the room

Desks

- orient in various directions
- pull away from wall (room to stand @ VNPS)

Teacher addresses the class from a variety of locations.

### 6 Answering Questions

Acknowledge, but don't answer:

- Proximity questions (b/c teacher is close by)
- Stop thinking questions

Answer:

- Keep thinking questions
- give HINTS not answers

### 7 Meaningful Notes

Student created:

- select
- synthesize
- reorganize

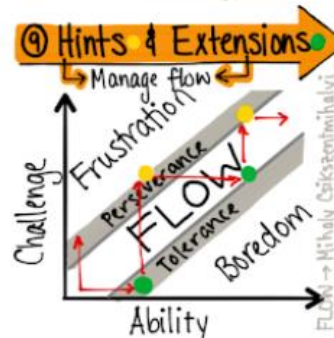
ideas

Based on their or others' boards

Provide time for this after levelling.

### 8 Build Autonomy

- Model how groups can visit other groups when they are stuck or done.
- Hints & extensions come from peers (not just the teacher).
- Helps manage flow



### 10 Level to the Bottom

- debrief
- class discussion
- direct teaching the "lesson"

Once all groups pass a minimum threshold.

Debrief 1 or more groups' solutions!

Work through a new problem w/ whole group

### 11 Check Understanding

Assign 4-6 "check for understanding" questions

Students choose to work

- individually
- in groups

at desks on VNPS

Purpose: self-evaluation (NOT marks)

### 12 Formative Assessment

measure → communicate

where student is currently

where student is going

Multiple & varied opportunities to demonstrate learning

observation

product

conversation

can't dis... isn't completely

fully very completely always

### 13 Summative Assessment

PROCESS > product

Evaluate what you value!

Include:

group + individual work

### 14 Reporting

Based on data (NOT points)

one aggregated mark

disaggregated evidence

Analysis of data

Counting of points

What has this student learned?

What can they improve?

# 4 verktøykasser

## Verktøykasse 2

Lærerrollen i et tenkende klasserom

## Verktøykasse 4

Vurdering

- Gi tenkeoppgaver
- Sett sammen synlig tilfeldige grupper
- Bruk vertikale, slettbare tavler

- Innred rommet slik at det ikke vender forover
- Svar bare på fortsett-å-tenke-spørsmål
- Gi tenkeoppgaver i starten av timen, muntlig og stående
- Gi sjekk-forståelsen-oppgaver
- Mobiliser kunnskapen i rommet

- Bruk tips og utvidelser om hverandre for å opprettholde flyten
- Forankre nedenfra
- Få elevene til å ta meningsfulle notater

- Evaluer det du mener er verdifullt
- Hjelp elevene med å se hvor de er, og hvor de er på vei

## Verktøykasse 1

Elevrollen i et tenkende klasserom

## Verktøykasse 3

Forankring av læring



*En tenkende klasserom er et klasserom som ikke bare legger til rette for tenkning, men også gir anledning til tenkning. Det er en plass som bebos av individer som tenker selvstendig, samtidig som de også tenker kollektivt, lærer sammen og bygger kunnskap og forståelse gjennom aktivitet og diskusjon. Det er en plass der læreren ikke bare fremmer tenkning, men også forventer det, både implisitt og eksplisitt.*

*Peter Liljedahl  
(oversatt av Chat GTP)*



# Oppgave 1

Er summen av tre påfølgende naturlige tall delelig på 3?

- Hva med fire? fem?...



# Verktøykasse 1:



Elevrollen i et tenkende klasserom

*Hvis vi ønsker at elevene våre skal tenke,  
må vi gi dem noe å tenke på.*

– Peter Liljedahl





- Grubleoppgaver

«Problemsolving is what we do when we don't know what to do.»

- Korttriks

<https://www.youtube.com/watch?v=KvwIJe9NS94>

- Virkelighetsnære oppgaver

Polya, in his preface to *How to Solve It* [12], states

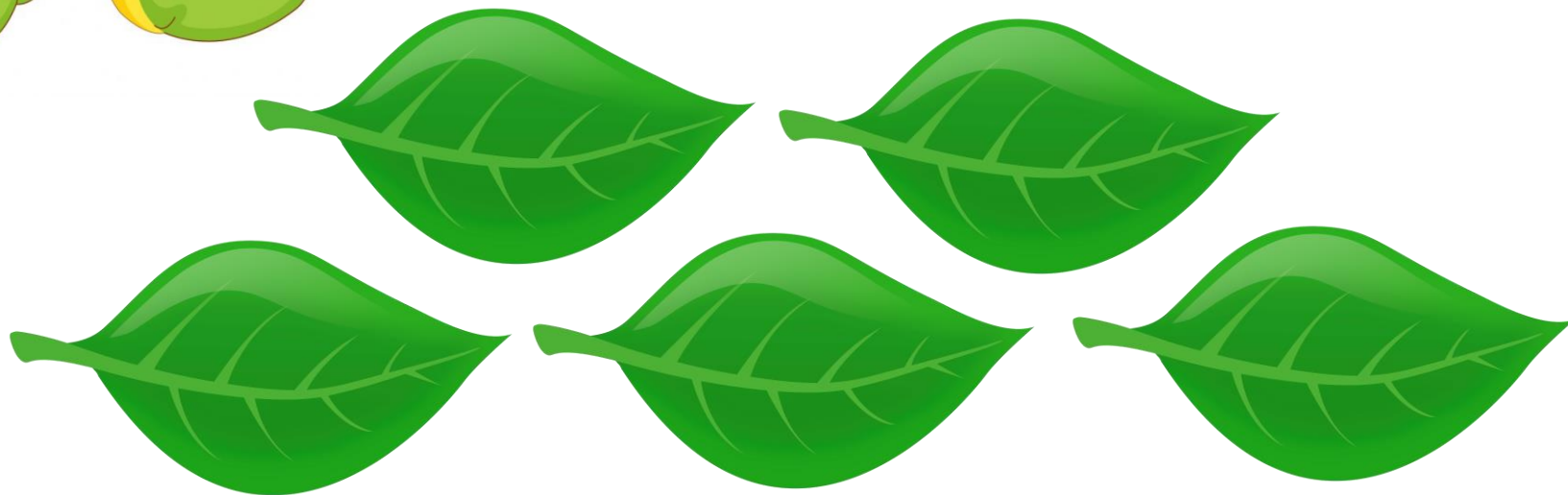
‘Thus, a teacher of mathematics has a great opportunity. If he fills his allotted time with drilling his students in routine operations he kills their interest, hampers their intellectual development, and misuses his opportunity. But if he challenges the curiosity of his students by setting them problems proportionate to their knowledge, and helps them to solve their problems with stimulating questions, he may give them a taste for, and some means of, independent thinking.’ (p.v).



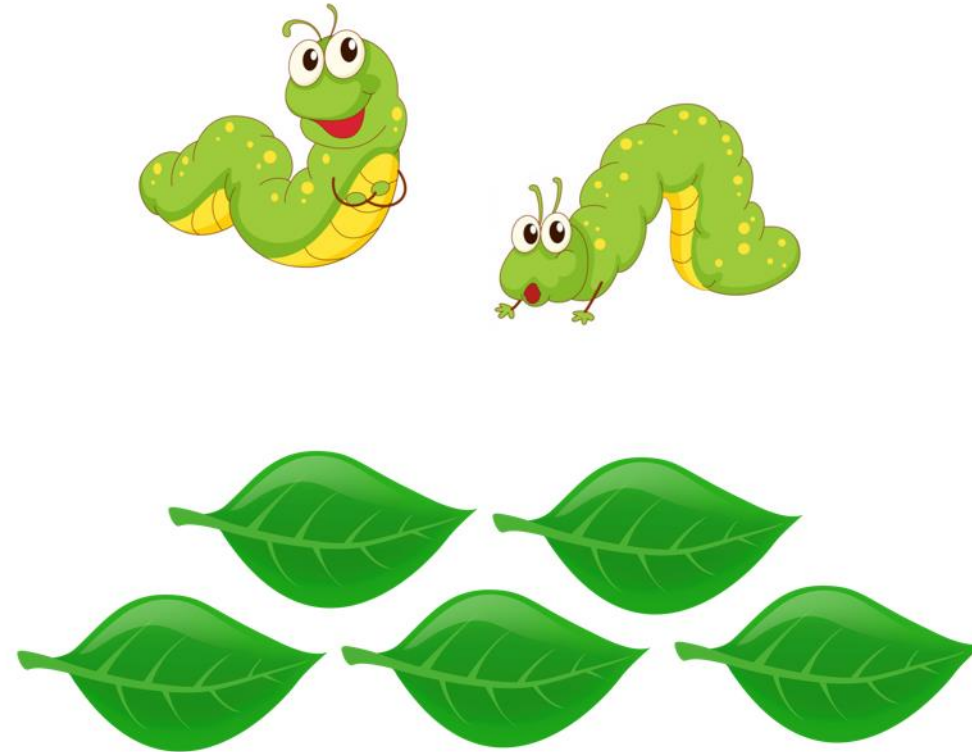
# Enkle oppstartsoppgaver:

- Velg 4 siffer fra 1-9. Bruk disse fire sifrene og lag regnestykker som gir svar fra 1-30.
- Lag regnestykker som gir svaret 24
- Bruk fire 4-tall og lag så mange regnestykker dere klarer.

# Småtrinnet: Larver og blader




OPPGAVE GITT MUNTLLIG: «En skoleklasse har to larver. De trenger fem blader hver dag til å fôre disse to larvene. Hvor mange blader ville de trengt til tolv larver?»



*Oppgaven er hentet fra «På jakt i elevens algebraiske tenkning» av Elisabeth Eriksen, Ida Heiberg Solem og Inger Ulleberg i Den viktige begynneropplæringen (Palm og Michaelsen 2018).*





Nå har jeg ikke flere kroner igjen.

Hvis du vil gå frem og tilbake over broen, så skal jeg doble pengene du har i lommen.

Etterpå skal du gi meg 8 kroner.



# Trollet ved broen

— Pernille Pind, 2012

Mette møter et troll som står og holder vakt på en bro. Trollet sier: *«Hvis du vil gå frem og tilbake over broen, så skal jeg doble de pengene du har i lommen. Etterpå skal du gi meg 8 kr».*

Det synes Mette høres ut til å være en lett måte å tjene penger på. Hun går frem og tilbake over broen en gang, og de pengene hun har i lommen, fordobles før hun betaler trollet 8 kr.

Mette får lyst til å prøve igjen. Enda en gang fordobles de pengene hun har i lommen, og igjen betaler hun trollet 8 kr.

Mette tar en tredje tur, og etter den turen har ikke Mette mer penger igjen.

Hvor mye penger hadde Mette til å begynne med?



# Utvidelse av oppgaven

Hvor mye penger måtte Mette hatt for at hun ikke skulle tape penger på avtalen?

Hvor mye penger måtte Mette starte med hvis hun hadde 100 kr etter tre turer over broen?

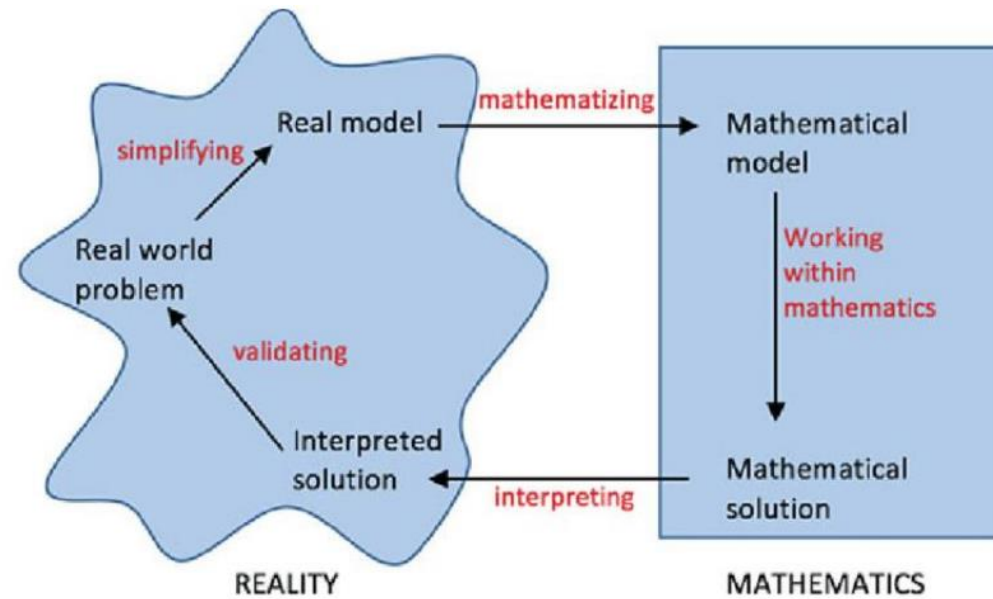
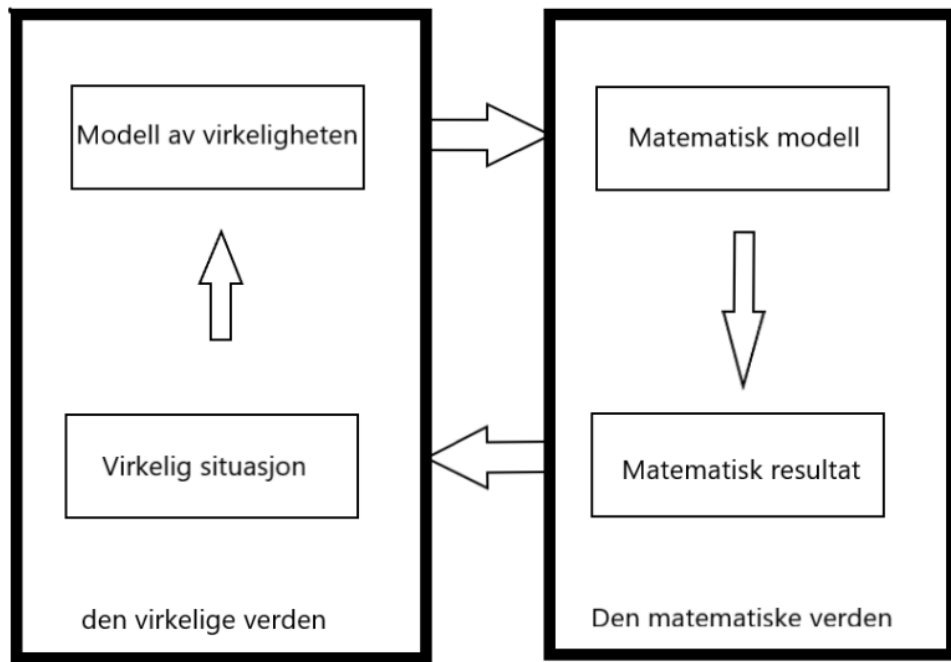
Hvor mye penger måtte Mette starte med hvis hun hadde 1000 kr etter tre turer over broen?

Går det an å lage en regle som gjør det enklere å vite hvor mye hun startet med og hvor mye hun har igjen etter tre turer?

Hva er det minste beløpet Mette måtte hatt for ikke å tape penger hvis avtalen var «tre doble summen hun har og så 5 kr til Trollet»

# Slalåmtur

| Navn       | Samlet inn (kr) | Leie av utstyr (kr) | Heiskort (kr) | Skitimer (kr) |
|------------|-----------------|---------------------|---------------|---------------|
| Aleksander | 750             | 200                 | 400           | 400           |
|            | 1250            | 100                 | 400           | 400           |
| David      | 500             | 300                 | 400           | 0             |
| Kristine   | 100             | 400                 | 400           | 400           |
| Jørgen     | 250             | 0                   | 400           | 0             |
|            | 100             | 0                   | 400           | 400           |
| Omar       | 380             | 300                 | 400           | 0             |
| Sara       | 220             | 400                 | 400           | 400           |
|            | 2000            | 200                 | 400           | 0             |
| Caroline   | 600             | 250                 | 400           | 25 0          |



Figur 5: Maaß sin modelleringssyklus

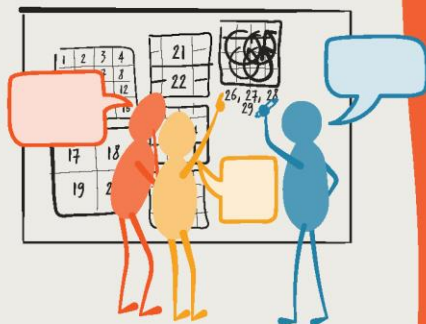
# Modelleringssyklus

Å BYGGE

# TENKENDE KLASSEROM

I MATEMATIKK

14 PRAKSISER  
FOR BEDRE  
LÆRING



PETER LILJEDAHL

CAPELEN DAMM AKADEMISK

## Hvor kan du finne gode oppgaver?

- [www.mattelist.no](http://www.mattelist.no)
- <https://www.matematikkenteret.no/bygge-tenkende-klasserom/aktiviteter-til-tenkende-klasserom>
- <https://www.peterliljedahl.com/teachers/card-tricks>
- <https://www.peterliljedahl.com/teachers/numeracy-tasks>



# VISIBLY RANDOM GROUPS

in math classrooms

## ② Visibly Random Groups

- ☐ Randomly assigned  
*eg playing cards*
- ☐ Daily & in front of students
- ☐ 2 or 3 students / group
- ☐ Sit & stand together



Strategic Groupings Goals

Educational

- pedagogical
- productivity
- peacefulness

Social

- diversity
- integration
- socialization

Visibly Random Groups

students need to see!

~~teacher assigns~~  
~~students choose~~

3s are ideal

SEPT. 1 Can be introduced ANYTIME in a course so start → TODAY! & repeat DAILY!

Students become agreeable to WORK in any GROUP they are placed in

Eliminates social barriers

Mobility of Knowledge between students

↓ Reliance on teacher for answers

↑ Reliance within and between groups for answers

↑ Engagement on task

↑ Enthusiasm for the class (even if the subject is not their favourite)

Sketchnote: @wheeler\_laura

Research: Peter Lijedahl



### ③ Vertical NonPermanent Surfaces

- Vertical
- Erasable



WHITEBOARD



CHALKBOARD

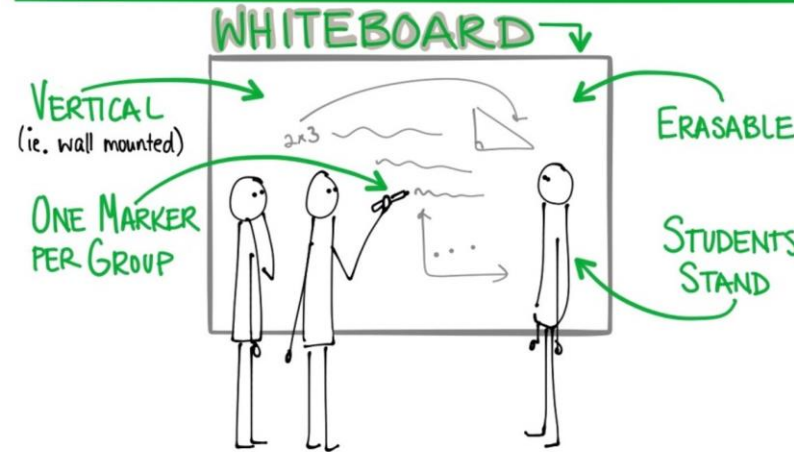


WINDOW

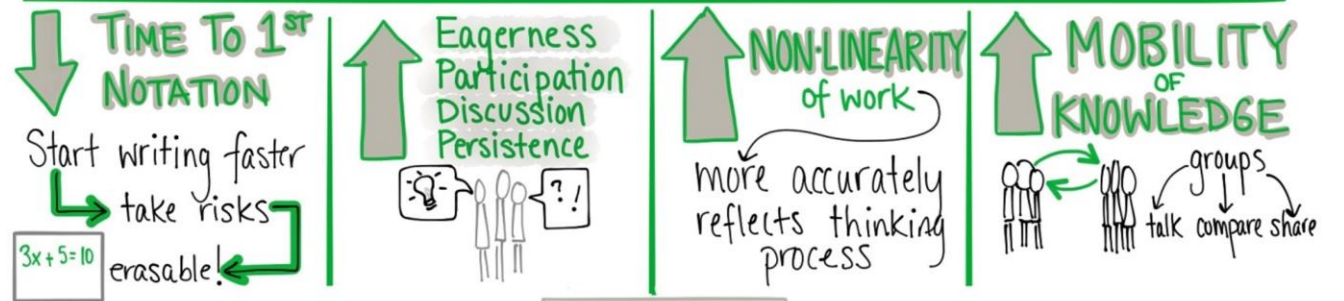
- 1 marker or chalk per group
- ↳ promotes discussion

## VERTICAL NON-PERMANENT SURFACES

in math class



You can also use...



Research: @pgiljedahl

Sketchnote: @wheeler\_laura

|                | vertical non-perm | horizontal non-perm | vertical permanent | horizontal permanent | notebook |
|----------------|-------------------|---------------------|--------------------|----------------------|----------|
| N (groups)     | 10                | 10                  | 9                  | 9                    | 8        |
| time to task   | 12.8 sec          | 13.2 sec            | 12.1 sec           | 14.1 sec             | 13.0 sec |
| time on task   | 7.1 min           | 4.6 min             | 3.0 min            | 3.1 min              | 3.4 min  |
| first notation | 20.3 sec          | 23.5 sec            | 2.4 min            | 2.1 min              | 18.2 sec |
| discussion     | 2.8               | 2.2                 | 1.5                | 1.1                  | 0.6      |
| eagerness      | 3.0               | 2.3                 | 1.2                | 1.0                  | 0.9      |
| participation  | 2.8               | 2.3                 | 1.8                | 1.6                  | 0.9      |
| persistence    | 2.6               | 2.6                 | 1.8                | 1.9                  | 1.9      |
| mobility       | 2.5               | 1.2                 | 2.0                | 1.3                  | 1.2      |
| non-linearity  | 2.7               | 2.9                 | 1.0                | 1.1                  | 0.8      |

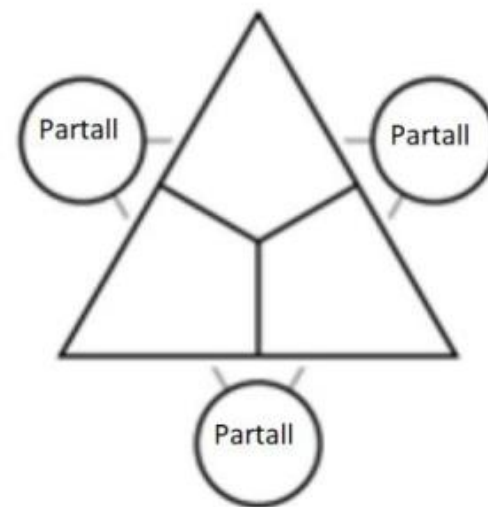
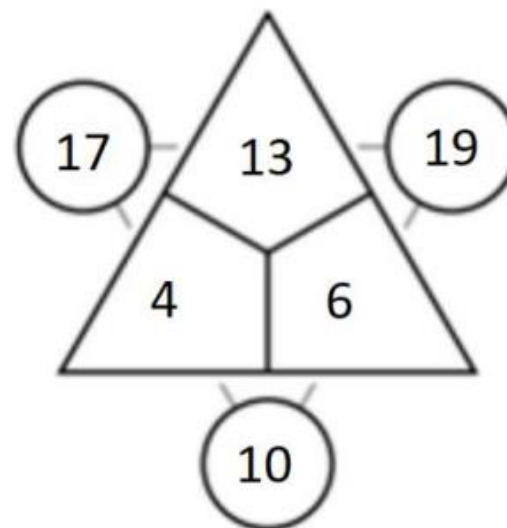
<https://twitter.com/AlexOverwijk/status/989966460108730368>

Nasjonal deleksamen i matematikk  
høst 2022

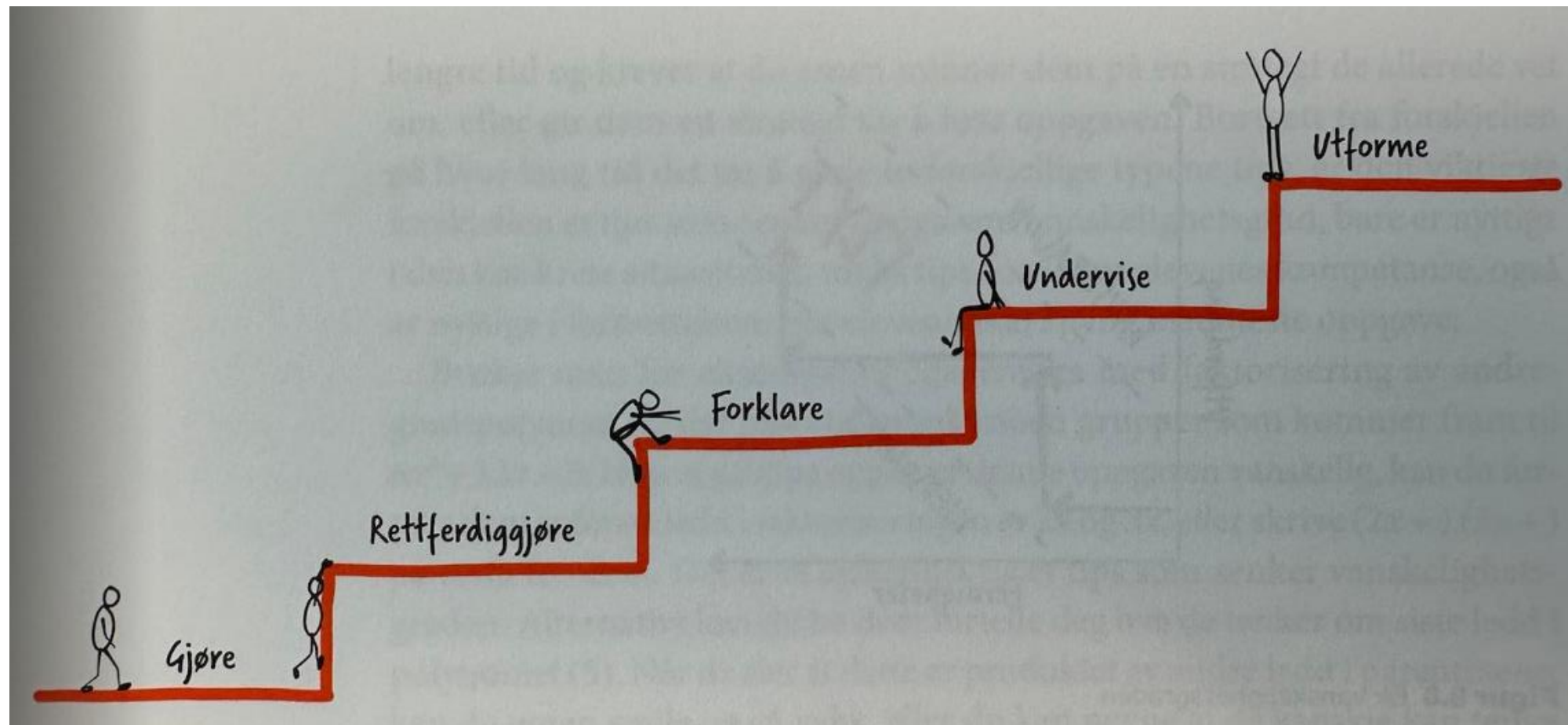
I en regnetrekant er tallene i sirklene summen  
av de tilstøtende tallene i trekanten

Si først:

Begrunn hvilke mulige kombinasjoner av  
par og oddetall inni trekanten som medfører at  
tallene i sirklene samtidig blir partall.



Måter å jobbe med oppgaven på som øker vanskelighetsgraden



## Verktøykasse 2

- 
- Innred rommet slik at det ikke vender forover
  - Svar bare på fortsett-å-tenke-spørsmål
  - Gi tenkeoppgaver i starten av timen, muntlig og stående
  - Gi sjekk-forståelsen-oppgaver
  - Mobiliser kunnskapen i rommet

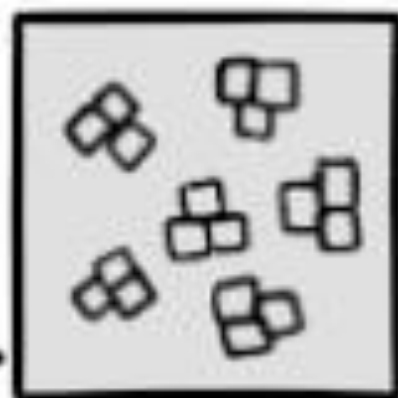
Lærerrollen i et tenkende klasserom



## ⑤ Defront the room

Desks → orient in various directions  
→ pull away from wall (room to stand @ VNPS)

Teacher addresses the class from a variety of locations.





## ⑥ Answering Questions

Acknowledge, but don't answer:

✗ Proximity questions  
(b/c teacher is close by)

✗ Stop thinking questions

Answer:

✓ Keep thinking questions  
↳ give HINTS not answers



# #ThinkingClassroom

10 Things to Say in Response to a Proximity or Stop-Thinking Question

Isn't that interesting?

Can you find something else?

Can you show me how you did that?

Does that make sense?

Are you sure?

Is that always true?

Why don't you try something else?

Why do you think that is?

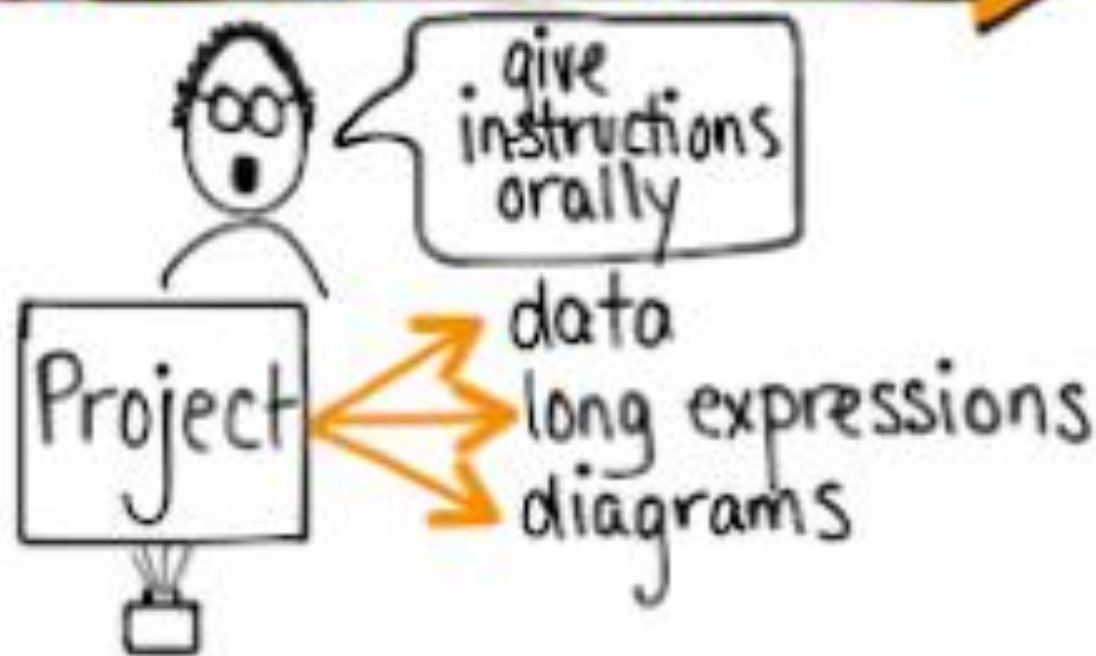
Why don't you try another one?

Are you asking me or telling me?

Author: @pgliljedahl

Graphic: @wheeler\_laura

## ④ Oral Instructions



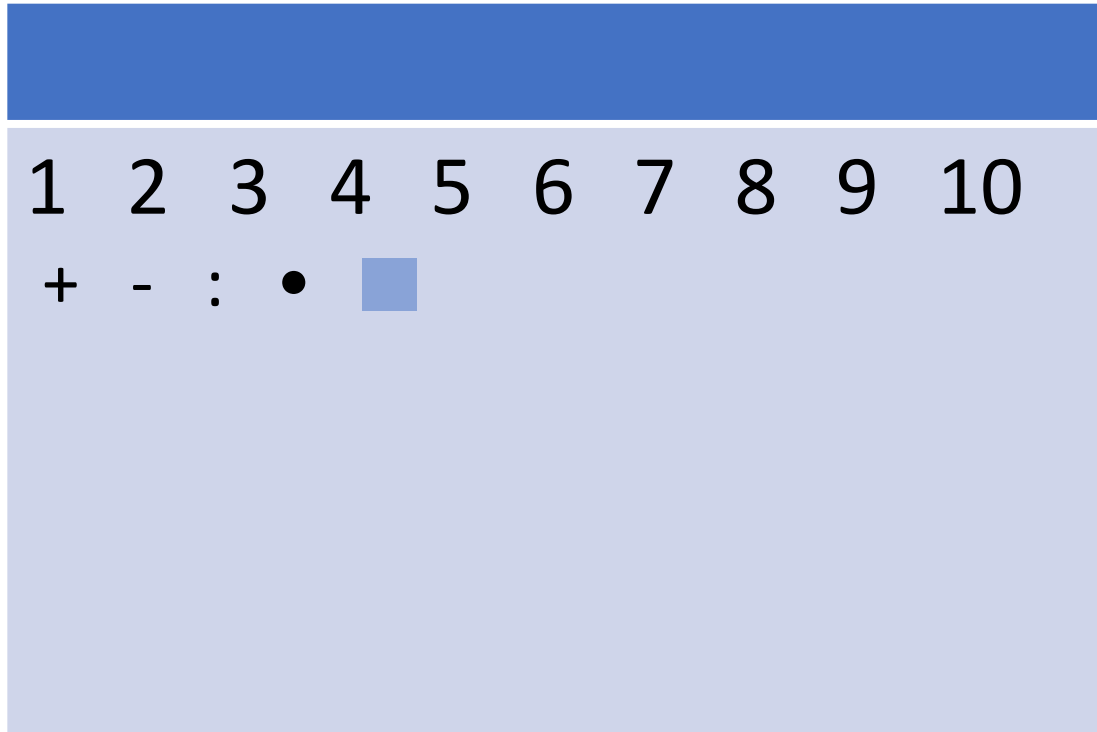
→ groups will discuss  
(instead of decoding text)

## ⑧ Build Autonomy

- Model how groups can visit other groups when they are stuck or done.
- Hints & extensions come from peers (not just the teacher).

→ Helps manage flow 

# Oppgave 2: Matematikkstrenger



A calculator interface with a blue header bar. Below it, a light blue background contains the digits 1 through 10 in a row. Underneath the digits are the operators +, -, :, •, and a blue square.

5, 8, 13, 24, 20

17, 2, 21, 3, 2

10, 14, 1, 20, 16

3, 3, 3, 3, 24

2, 2, 2, 2, 9

2, 3, 7, 7, 7

1, 2, 3, 4, 5

Forenkling til småtrinnet:  
kun + og -

17, 17, 8, 1, 2

13, 9, 13, 1, 13

15, 1, 1, 1, 19

15, 1, 1, 1, 19

2, 2, 7, 7, 7

2, 2, 2, 3, 8

3, 3, 3, 3, 19





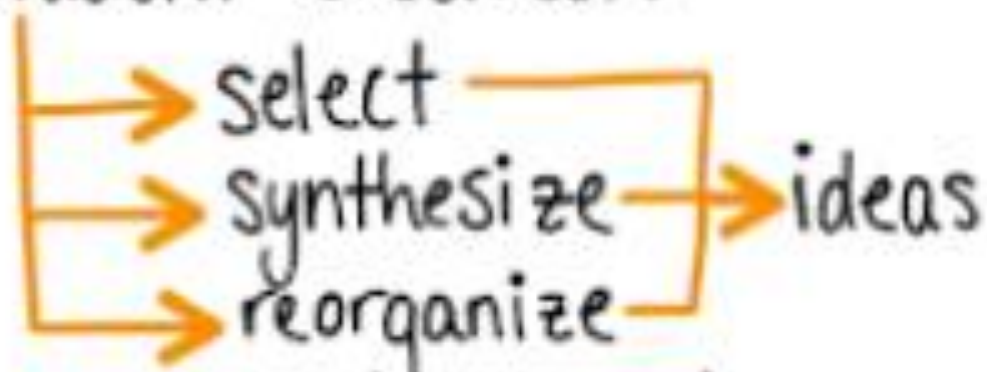
*Students must  
meet challenges on  
the heel of success.*

Peter Liljedahl



## ⑦ Meaningful Notes

Student created:




Based on their ~~or~~ others' boards

Provide time for  
this after levelling.

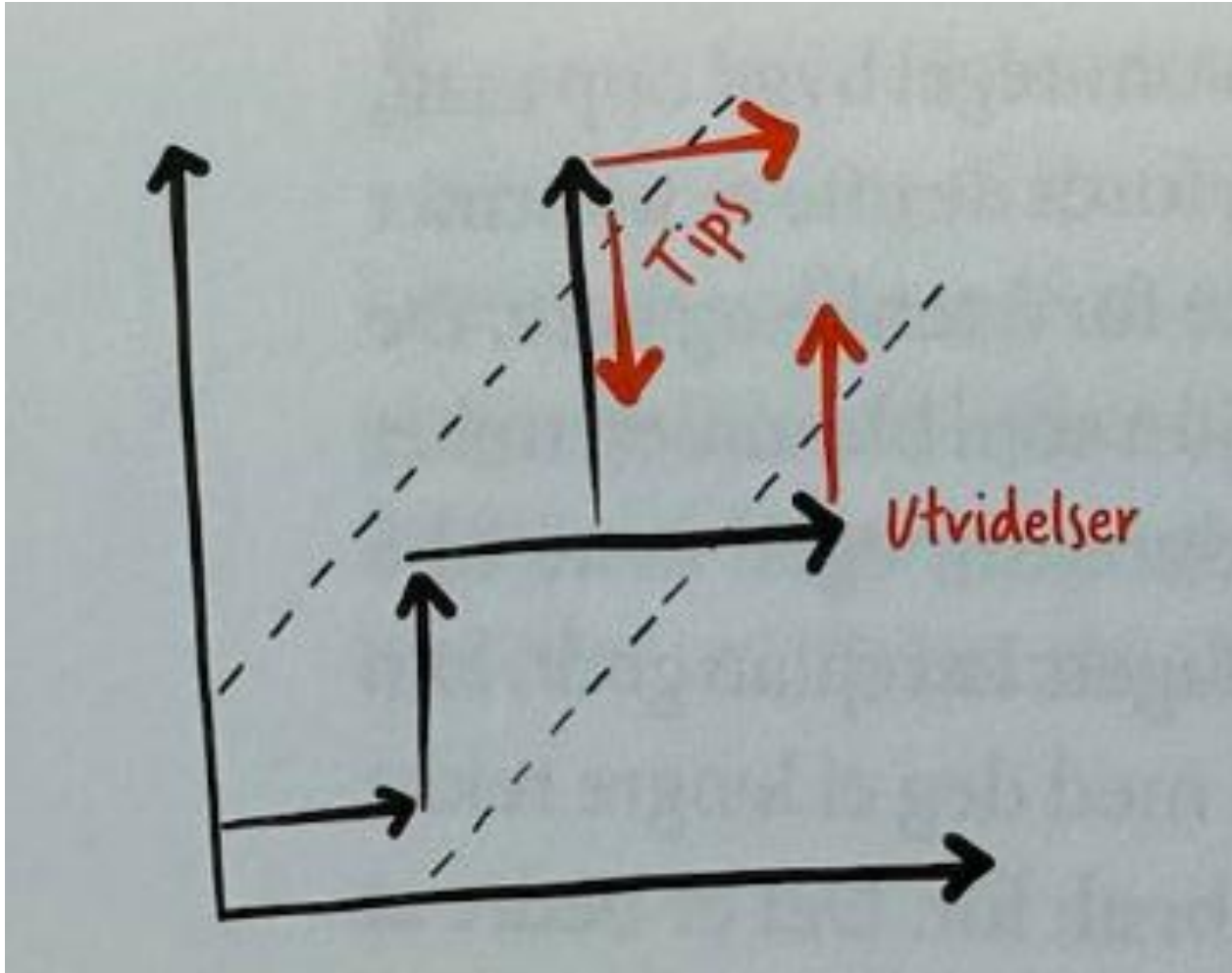


# Verktøykasse 3:

## Forankring av læring

- 
- Bruk tips og utvidelser om hverandre for å opprettholde flyten
  - Forankre nedenfra
  - Få elevene til å ta meningsfulle notater

# Tips og utvidelser – for å opprettholde flyt

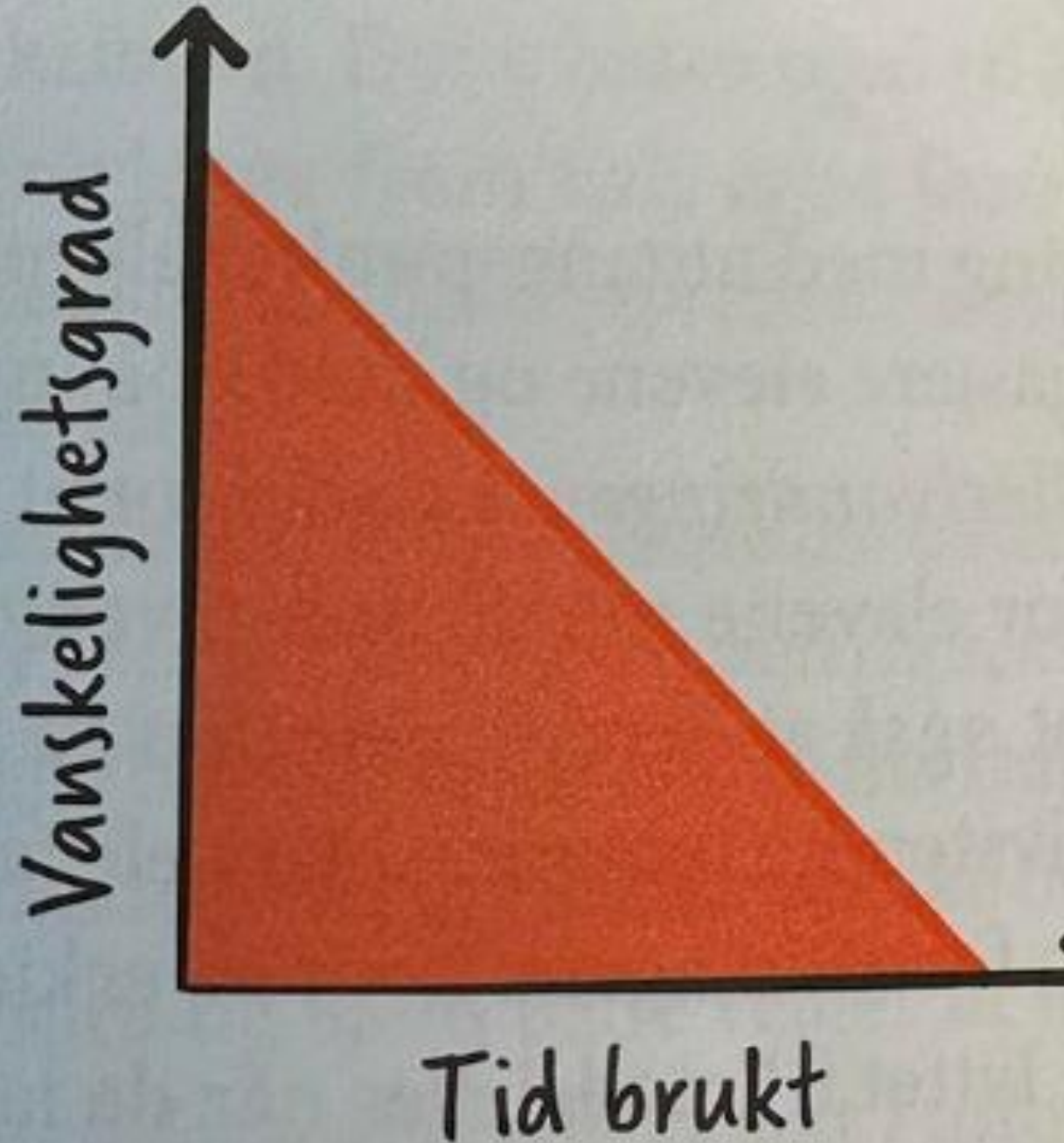


- Gi tips og utvidelser asynkront.
- La gruppene ta ansvar for at alle i gruppa lærer noe.
- Begynn med enkle oppgaver slik at gruppa finner flyten.
- Lag oppgaver med stigende vanskelighetsgrad der du endrer på bare en ting av gangen.
- Lag en sekvens med parallelle oppgaver.



Forankring kan skje på tre ulike måter.  
Læreren leder en ...

1. overordnet diskusjon uten å skrive ned noe.
2. detaljert diskusjon mens hen noterer viktige poeng på tavla.
3. detaljert diskusjon ved å bruke elevenes arbeider på vertikale tavler til å gjennomgå forskjellige nivåer i løsningen.





# OPPSUMMERING

## MAKROTILTAK

- Forankre fra bunnen av.

#1

$6 \cdot 7 = 42 \cdot 2 = 84$   
 $6 \cdot 10 = 60 \cdot 2 = 120$   
 $7 \cdot 10 = 70 \cdot 2 = 140$   
 $84 + 120 + 140 = 344$

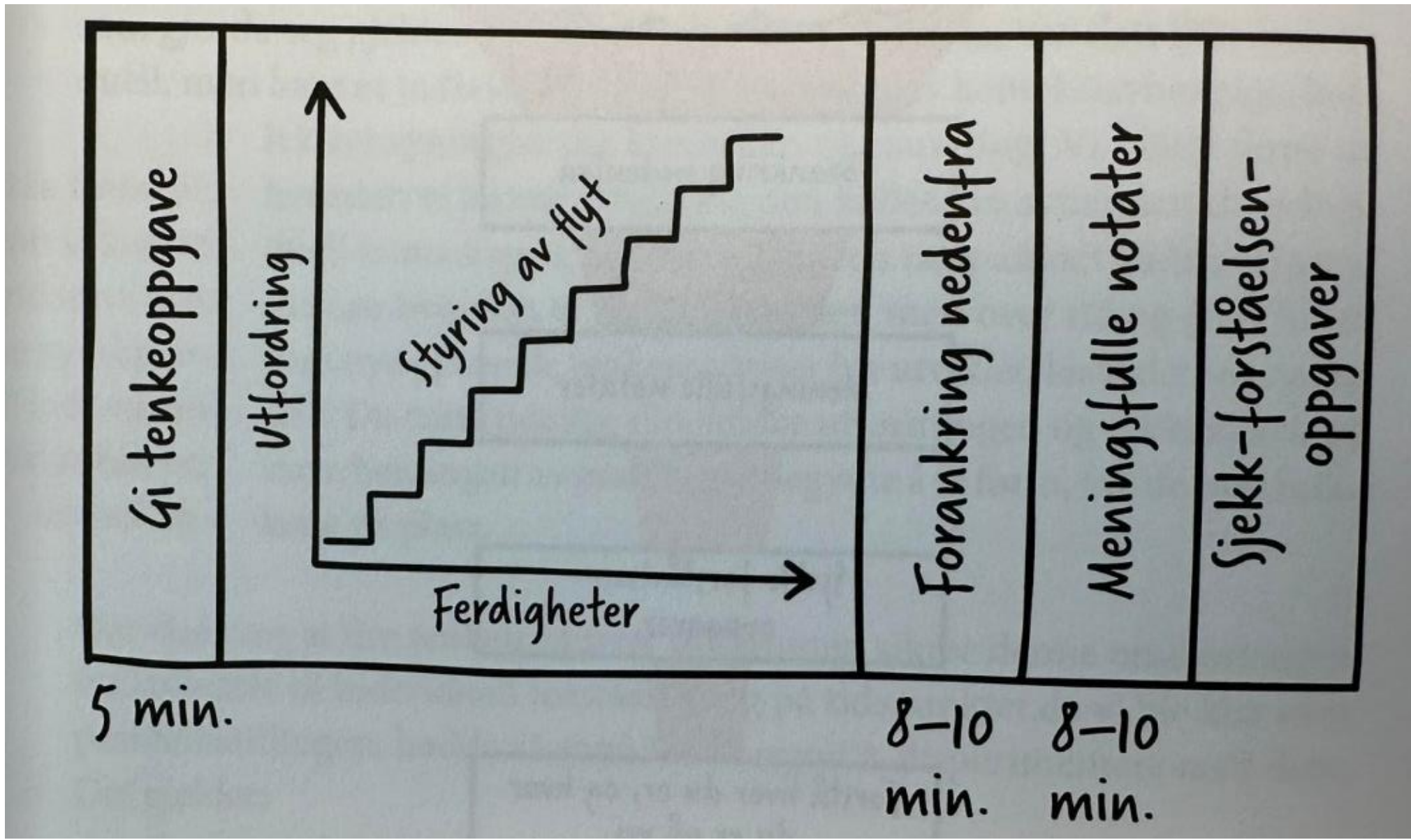
#2

$SA = 2(lw + wh + lh)$   
 $= 2(7 \cdot 6 + 6 \cdot 10 + 7 \cdot 10)$   
 $= 2(42 + 60 + 70)$   
 $= 2(172)$   
 $= 344 \text{ cm}^2$

## MIKROTILTAK

- Marker elevenes tenkning ved å ramme inn notatene deres med den røde tusjen.
- Bruk tips for å få opp ideer som mangler på de vertikale tavlene.
- Velg ut og prioriter rekkefølgen på elevenes arbeid i en gallerivandring.
- Sørg for at elevene blir stående oppreist.
- Sørg for at elevene går rundt omkring.
- Bruk mest tid på grunnideene i begynnelsen av oppsummeringen.
- Ikke la elevene presentere sitt eget arbeid.





# Piratdronningens vanskelige valg

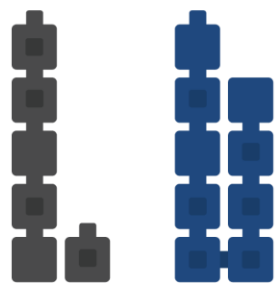
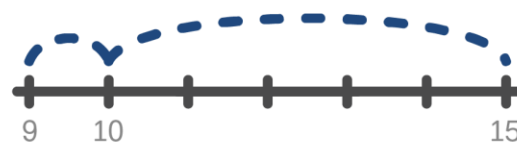
---

- En gjeng pirater er overlykkelige etter at de har erobret en stor skatt. De har delt alt gull og sølv, men en GIGANTISK diamant kan ikke deles. Piratdronningen bestemmer seg for å lage et spill for å bestemme hvem som skal få diamanten. Hun ber alle piratene stille seg sammen med henne i en stor sirkel. Piratdronningen peker på en pirat som kan begynne. Denne piraten går ut av sirkelen, henter sitt gull og forlater gruppen. Piraten som står på hens venstre side blir igjen i sirkelen, men den neste piraten går ut av sirkelen, henter gullet sitt og forlater gruppen. Piraten som står til venstre blir igjen, men den neste piraten går ut. Dette fortsetter til alle piratene unntatt en har forlatt sirkelen. Den som står igjen får diamanten. Hvem burde piratdronningen peke på slik at hun får beholde diamanten selv?

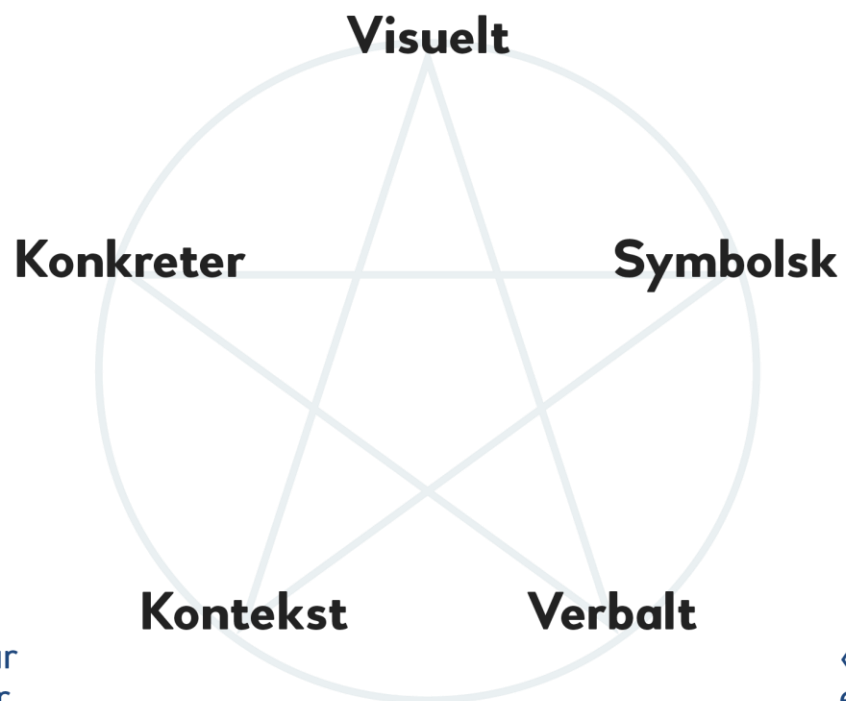




# Representasjoner




Lisa har seks drops. Hun får ni drops av moren sin. Hvor mange drops har hun nå?



$$6 + 9 = 15$$
$$5 + 10 = 15$$

«Ni er nesten ti. Så jeg flytter en fra seks til ni. Da har jeg fem pluss ti, som blir femten»

## Verktøykasse 4:

- 
- Evaluer det du mener er verdifullt
  - Hjelp elevene med å se hvor de er, og hvor de er på vei

Vurdering

Målet med tenkende klasserom er ikke å finne engasjerende oppgaver som elevene kan tenke over.

Målet er derimot engasjerte elever som er villige til å tenke over alle oppgaver.

Peter Liljedahl



Universitetet  
i Sørøst-Norge